Münster. 1928, № 26

Phil. Diss.

Mathematik

Untersuchungen über Strahlensysteme.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Hohen Philosophischen
und Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster i. Westf.

vorgelegt von

Studienrat Heinrich Nadermann
aus Gronau i. Westfalen.

Tag der mündlichen Prüfung: 3. März 1927.
Dekan: Herr Prof. Dr. v. Salis.
Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. v. Lilienthal.

1920

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt:

Seite

§ 1. Einleitung. 5

§ 2. Das Zylindroid als Schraubungsachsenfläche. Die kinematische Bedeutung des Distributionsparameters. 18

§ 3. Die Untersuchung des Ortes der Endpunkte der Zylindroidachsen aller durch einen Strahl eines allgemeinen Strahlensystems hindurchgelegten Strahlenflächen. 22

§ 4. Anwendung auf die Normalenkongruenz ($H = o$). 29

§ 5. Anwendung auf die parabolische Kongruenz ($K = o$). 39

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554813_0130

§ 1. Einleitung.

Die nachstehenden Untersuchungen verfolgen den Zweck, die von R. v. Lilienthal angegebene kinematische Bedeutung des Chasles'schen Distributionsparameters einer gradlinigen Fläche, der auch „Verteilungsparameter" und „Drall" genannt wird, für die Theorie der gradlinigen Strahlensysteme fruchtbar zu machen. Ich gebe zunächst eine kurze Uebersicht über die Entwicklung dieser Theorie, soweit sie für unsere Zwecke in Betracht kommt.

Ein Strahlensystem oder eine Strahlenkongruenz ist eine doppelte Mannigfaltigkeit von Geraden. Grundlegend für das Studium von Strahlenkongruenzen ist eine Arbeit von E. E. Kummer[1]). Alle Strahlen der Kongruenz werden als von einer Ausgangsfläche geschnitten gedacht, die mittels zweier Parameter u und v dargestellt und auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen ist. Ein Strahl s ist durch seinen Schnittpunkt (x_0, y_0, z_0) mit der Ausgangsfläche und seine Richtungskosinus ξ, η, ζ, die ebenfalls von u und v abhängig sind, bestimmt.

Ein beliebiger Punkt auf s hat also die Koordinaten: $x = x_0 + t.\ \xi$, usw., wo t seine auf dem Strahl gemessene Entfernung von der Ausgangsfläche ist. ξ, η, ζ sind zugleich die Koordinaten der Abbildung des Strahles auf die Einheitskugel.

Es werden nun der kürzeste Abstand zwischen dem Strahl s (u, v) und einem Nachbarstrahl s′ (u + du, v + dv) nach Länge (dp) und Richtung, ferner die Koordinaten seines Fußpunktes auf dem Strahl s, des sogenannten Striktionspunktes bezüglich s′, sodann der

[1]) Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Journal für Mathematik, 59, 1860, p. 189.

von den beiden Strahlen gebildete Winkel $d\varepsilon$ als Funktionen der Bestimmungsstücke des gegebenen Strahles s und der Differentiale du und dv berechnet. Die erste Grundform, welche das Quadrat des Bogenelementes der sphärischen Abbildung der Kongruenz darstellt, lautet:

$$ds^2 = \Sigma\, d\xi^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2.$$

Die Koeffizienten dieser Differentialform sind die Fundamentalgrößen:

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2,\quad F = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v},\quad G = \Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2.$$

Als zweite Grundform dient der Ausdruck:

$$\Sigma\, dx_0\, d\xi = e\, du^2 + (f + f')\, du\, dv + g\, dv^2.$$

Die Koeffizienten dieser Differentialform sind die Fundamentalgrößen:

$$e = \Sigma \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u},\quad f = \Sigma \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u},\quad f' = \Sigma \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v},\quad g = \Sigma \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Die zweite Differentialform ist von der Ausgangsfläche abhängig und hat keine geometrische Bedeutung. Der Ausdruck:

$$r = -\frac{e\, du^2 + (f + f')\, du\, dv + g\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

bedeutet die auf dem Strahl s gemessene Entfernung des zu s′ gehörigen Striktionspunktes von der Ausgangsfläche; sie heißt kurz die Abszisse des Nachbarstrahles s′.

Um den Strahl liegen einfach unendlich viele unendlich benachbarte Strahlen; jedem ist ein bestimmter Wert von $\frac{dv}{du}$, also auch von r zugeordnet.

Wir schließen im Folgenden „isotrope“ Strahlensysteme ($e : (f + f') : g = E : 2F : G$) und „besondere“ ($EG - F^2 = 0$) aus und betrachten nur „reguläre“ Strahlen, das heißt solche, die zu Wertepaaren u, v gehören, für die weder: $e : (f + f') : g = E : 2F : G$ noch $EG - F^2 = 0$ ist. Wenn $\frac{dv}{du}$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt, durchläuft r stets nur endliche Werte, von dem einen Grenzwert r_1 bis zum andern r_2, der Striktionspunkt also das Intervall von

einem „Grenzpunkt“ bis zum andern. In der Mitte zwischen den Grenzpunkten liegt der „Mittelpunkt“ des Strahles. Zur Berechnung der Grenzwerte dienen die Formeln:

$$r_1 + r_2 = -\frac{Eg - F(f+f') + Ge}{EG - F^2},$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{eg - \frac{1}{4}(f+f')^2}{EG - F^2}$$

Man kann die Abszisse eines beliebigen Nachbarstrahles auch aus der Hamiltonschen Gleichung berechnen, welche lautet:

$$r = r_1 \cos^2 \omega + r^2 \sin^2 \omega,$$

wo ω der Winkel ist, den der zu einem Nachbarstrahl gehörende kürzeste Abstand mit dem zu r_1 gehörenden bildet. Die durch den Strahl s und die kürzesten Abstände in den Grenzpunkten gelegten Ebenen, die „Hauptebenen“, stehen aufeinander senkrecht. Zwischen den Grenzpunkten, gleichweit von ihnen entfernt, liegen, wenn man von den „parabolischen“ Strahlensystemen absieht, die beiden „Brennpunkte“ des Strahles; sie sind reell oder imaginär. Im ersteren Falle gehen durch sie zwei schneidende Strahlen, welche mit dem Strahl s die beiden „Brennebenen“ bilden. Diese liegen symmetrisch zu den Halbierungsebenen des von den Hauptebenen gebildeten Winkels. Bei einem parabolischen Strahlensystem tritt auf jedem Strahl nur ein Brennpunkt auf, und durch jeden Strahl geht nur eine Brennebene. Für das Verhältnis $\frac{dp}{d\varepsilon}$ findet sich bei Kummer eine Formel, die nicht näher erörtert wird. Sie drückt den sogenannten „Verteilungs-“ oder „Distributionsparameter“ aus, der in den späteren Untersuchungen eine besondere Rolle spielen wird. Da dieser Ausdruck für einen festen Strahl nur von $\frac{dv}{du}$ abhängig ist, kommt jeder durch den Strahl gehenden Strahlenfläche ein bestimmter Wert des Distributionsparameters zu. Jede durch den Strahl s und den kürzesten Abstand von s und einem Nachbarstrahl s′ gelegte Ebene ist Berührungsebene an jede Strahlenfläche, die s und s′ zu Erzeugenden hat, und zwar in ihrem Striktionspunkt. Dieser ist nämlich der Schnitt-

punkt der Striktionslinie jeder durch s und s′ gehenden Strahlenfläche mit dem Strahl s, jene Ebene ist die zum Nachbarstrahl s′ gehörende „Striktionsebene". Für Striktionspunkt und Striktionsebene hat man auch die Bezeichnungen „Zentralpunkt" und „Zentralebene". Der Ort der Grenzpunkte besteht aus zwei Flächen, die „Grenzflächen" genannt werden, während man unter den „Brennflächen" den Ort der Brennpunkte versteht.

Eine weitergehende Behandlung erfuhren die Strahlenkongruenzen durch K. Zindler[2]). Er stellt die Kongruenz in homogenen Plückerschen Linienzeigern $p_\nu(u, v)$, $\nu = 1, 2, \ldots 6$ dar. Wenn wir unter Beibehaltung unserer bisherigen Bezeichnungen den Strahl s als „Achse", einen beliebigen Punkt auf ihm, etwa seinen Mittelpunkt, als „Ursprung", eine beliebige durch ihn gelegte Ebene, etwa eine der beiden Hauptebenen als „Ausgangsebene" wählen, so sind unsere Größen r, ω, dp, dε die „natürlichen Linienzeiger" eines Nachbarstrahles. Sie stehen mit den Plückerschen Zeigern in funktionalem Zusammenhange. Die Abszisse z, das Azimut α und den Verteilungsparameter P, welche Größen gleichbedeutend mit den bisherigen Größen r, ω, $\frac{dp}{d\varepsilon}$ sind, nennt Zindler die Zeiger der Fortschreitungsrichtung. z und P stellt er als Funktionen von α dar. Aus den sechs Plückerschen Zeigern und ihren ersten partiellen Ableitungen nach u und v stellt er sechs Fundamentalgrößen her, die in seinen Formeln eine ähnliche Rolle spielen, wie die sechs Kummerschen Fundamentalgrößen E, F, G, e, $(f + f')$ und g. Zindler führte als neue Strahlenflächen diejenigen ein, die den äußersten Werten des Verteilungsparameters zugeordnet sind. Die Zentraltangenten derselben stehen auf dem Strahl im Mittelpunkte senkrecht, fallen also in die Mittelebene des Strahles. Ihre Zentralebenen nennt er die „Krümmungsebenen", weil ihr Azimut denjenigen Fortschreitungsrichtungen der Kongruenz zugehört, in denen die berührenden Schraubenflächen in ihren Zentralpunkten extreme Werte des Krümmungsmaßes haben. Die Krümmungsebenen

[2]) Konrad Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen. II. Teil, 2. Abschnitt. Sammlung Schubert L I.

halbieren die von den Hauptebenen gebildeten Winkel. Die neuen Strahlenflächen selbst werden „Krümmungsflächen“ genannt. Sie werden uns unten als Distributionsstrahlenflächen begegnen. Für diese werden ebenso wie für die „Hauptflächen“ und die abwickelbaren Strahlenflächen die Differentialgleichungen aufgestellt.

Im Jahre 1908 erschien eine Arbeit des Italieners G. Sannia[3]) über Strahlenkongruenzen. Hierin bildete er aus den Kummerschen neue Fundamentalgrößen, welche lauten:

$$L = \frac{1}{\Delta}(Fe - Ef'),\quad M + \lambda = \frac{1}{\Delta}(Ff - Eg),$$

$$M - \lambda = \frac{1}{\Delta}(Ge - Ff'),\quad N = \frac{1}{\Delta}(Gf - Fg),$$

wo Δ der positive Wert von $\sqrt{EG - F^2}$ ist. Umgekehrt ist:

$$e = \frac{E(M - \lambda) - FL}{\Delta},\quad f = \frac{EN - F(M + \lambda)}{\Delta}$$

$$f' = \frac{F(M - \lambda) - GL}{\Delta},\quad g = \frac{FN - G(M + \lambda)}{\Delta}$$

Ferner setzte Sannia an die Stelle der zweiten Kummerschen Grundform die neue Differentialform: $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$.

Sie stellt das negative „Moment“ der beiden unendlich benachbarten Strahlen s und s′ dar. Als solches bezeichnet Cayley das Produkt aus dem kürzesten Abstande der beiden unendlich benachbarten Strahlen und dem von ihnen gebildeten Winkel, nach unseren bisherigen Bezeichnungen also die Größe $dp.d\varepsilon$. Teilweise fand sich die neue Darstellung bereits in einer zwei Jahre früher erschienenen Arbeit von K. Zindler[4]). Der Distributionsparameter ist nach Sannia gleich dem negativen Verhältnis, gebildet aus

---

[3]) Nuova esposizione della Geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee.

Di Gustavo Sannia, a Torino.

Annali di Metematica pura ed applicata. Serie III. Tomo XV. Milano 1908. p. 143.

[4]) Vergleiche: K. Zindler, Bemerkungen zum Berichte des Herrn Sannia. Mathematische Annalen, 69, 1910. S. 446.

seiner zweiten und der Kummerschen ersten Differentialform; er lautet also:

$$p = -\frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

Man findet leicht, daß die Proportion:

$$L : 2M : N = E : 2F : G$$

gleichbedeutend mit der Proportion:

$$e : (f + f') : g = E : 2F : G$$

ist, daß also nach Ausschluß isotroper Strahlensysteme sich p wirklich mit $\frac{dv}{du}$ ändert. Die äußersten Werte von p, nämlich p_1 und p_2, nennt Sannia die „Hauptdistributionsparameter", die zu ihnen gehörigen Strahlenflächen heißen „Distributionsstrahlenflächen". Sie sind identisch mit den Krümmungsflächen von Zindler. Man kommt auf folgende Weise zu der von Sannia angegebenen Formel:

$$p = p_2 \cos^2 \Theta + p_1 \sin^2 \Theta.$$

Es sei σ die Bogenlänge irgend eines Kurvenstückes auf der Einheitskugel, das ganz in dem Bereiche liegt, für den die Funktionen ξ, η, ζ definiert sind. Man hat dann, wenn man abkürzend:

$$\frac{du}{d\sigma} = u', \quad \frac{dv}{d\sigma} = v' \text{ setzt:}$$

$$E\,u'^2 + 2F\,u'\,v' + G\,v'^2 = 1, \text{ folglich:}$$

$$-p = L\,u'^2 + 2M\,u'\,v' + N\,v'^2.$$

Die zu den extremen Werten von p gehörenden Wertepaare u', v' können nach einer Methode ermittelt werden, die dem von R. v. Lilienthal bei der Auffindung der extremen Werte der Normalkrümmung einer Flächenkurve eingeschlagenen Wege entspricht[5]). Hiernach erhalten wir die genannten Wertepaare u', v', wenn wir die partiellen Ableitungen des Ausdruckes: $Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 + \lambda\,(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 - 1)$ nach u' und v' gleich Null setzen.

So ergeben sich die Bedingungen:

$$(L + \lambda E)\,u' + (M + \lambda F)\,v' = 0 \text{ und}$$

$$(M + \lambda F)\,u' + (N + \lambda G)\,v' = 0.$$

[5]) „Vorlesungen über Differentialgeometrie" von R. v. Lilienthal. II. Bd. Flächentheorie, S. 157.

Die gesuchten Wertepaare werden folglich durch die Gleichung:

$(LF - ME)\,u'^2 + (LG - NE)\,u'\,v' + (MG - FN)\,v'^2 = 0$

geliefert. Sie sind nach einem bekannten Schlußverfahren stets reell. Nennen wir diese Wertepaare u'_1, v'_1 und u'_2, v'_2, so ergibt sich, wenn wir mit q einen Proportionalitätsfaktor bezeichnen:

$$q\,u'_1\,u'_2 = MG - FN,\quad q\,(u'_1\,v'_2 + u'_2\,v'_1) = NE - LG,$$
$$q\,v'_1\,v'_2 = LF - EM,\text{ und damit:}$$
$$u'_1\,u'_2\,E + (u'_1\,v'_2 + u'_2\,v'_1)\,F + v'_1\,v'_2\,G = 0 \text{ und}$$
$$u'_1\,u'_2\,L + (u'_1\,v'_2 + u'_2\,v'_1)\,M + v'_1\,v'_2\,N = 0.$$

Die Differentialgleichungen:

$$v'_1\,du - u'_1\,dv = 0,\quad v'_2\,du - u'_2\,dv = 0$$

legen auf der Einheitskugel zwei Kurvenscharen fest. Die Bogenlänge der Einzelkurven der ersten werde mit σ_1, die der Einzelkurven der zweiten mit σ_2 bezeichnet. Man hat dann für eine beliebige Funktion F von u und v:

$$\frac{dF}{d\sigma_1} = \frac{\partial F}{\partial u}\,u'_1 + \frac{\partial F}{\partial v}\,v'_1,\quad \frac{dF}{d\sigma_2} = \frac{\partial F}{\partial u}\,u'_2 + \frac{\partial F}{\partial v}\,v'_2.$$

Nun folgt:

$$\Sigma \frac{d\xi}{d\sigma_1}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma_2} = u'_1\,u'_2\,E + (u'_1\,v'_2 + u'_2\,v'_1)\,F + v'_1\,v'_2\,.\,G = 0,$$

das heißt, die Scharen (σ_1) und (σ_2) sind orthogonal, und damit stehen die zu den extremen Werten von p gehörenden Striktionsebenen aufeinander senkrecht.

Nimmt man:

$$\Sigma \frac{d\xi}{d\sigma}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma_1} = \sin\Theta,\quad \Sigma \frac{d\xi}{d\sigma}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma_2} = \cos\Theta,$$

so wird: $$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\xi}{d\sigma_1}\sin\Theta + \frac{d\xi}{d\sigma_2}\cos\Theta,$$

usw.

und damit: $$\frac{du}{d\sigma} = u'_1\sin\Theta + u'_2\cos\Theta,$$

$$\frac{dv}{d\sigma} = v'_1\sin\Theta + v'_2\cos\Theta.$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die Gleichung für $-p$ ein und bezeichnen die zu u'_1, v'_1, beziehungsweise

u'_2, v'_2 gehörenden Werte von p mit p_1, beziehungsweise p_2. Dann ergibt sich die obige Sanniasche Formel:

$$p = p_1 \sin^2 \Theta + p_2 \cos^2 \Theta.$$

Unter Benutzung der Bogenlänge σ kann man die Definitionsgleichung für den Distributionsparameter p in der Form schreiben:

$$p = \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma}\left(\eta \frac{d\zeta}{d\sigma} - \zeta \frac{d\eta}{d\sigma}\right).$$

Wählen wir die Bezeichnung der Lösungspaare (u'_1, v'_1), (u'_2, v'_2) so, daß:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{d\xi}{d\sigma_1} & \frac{d\eta}{d\sigma_1} & \frac{d\zeta}{d\sigma_1} \\ \frac{d\xi}{d\sigma_2} & \frac{d\eta}{d\sigma_2} & \frac{d\zeta}{d\sigma_2} \end{vmatrix} = 1$$

ist, so folgt:

$$\xi = \frac{d\eta}{d\sigma_1}\frac{d\zeta}{d\sigma_2} - \frac{d\eta}{d\sigma_2}\frac{d\zeta}{d\sigma_1},$$

$$\eta = \frac{d\zeta}{d\sigma_1}\frac{d\xi}{d\sigma_2} - \frac{d\zeta}{d\sigma_2}\frac{d\xi}{d\sigma_1},$$

$$\zeta = \frac{d\xi}{d\sigma_1}\frac{d\eta}{d\sigma_2} - \frac{d\xi}{d\sigma_2}\frac{d\eta}{d\sigma_1},$$

und damit wird:

$$\eta \frac{d\zeta}{d\sigma} - \zeta \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{d\xi}{d\sigma_2} \sin \Theta - \frac{d\xi}{d\sigma_1} \cos \Theta,$$

usw. und:

$$p = \Sigma \left(\frac{dx_0}{d\sigma_1} \sin \Theta + \frac{dx_0}{d\sigma_2} \cos \Theta\right)\left(\frac{d\xi}{d\sigma_2} \sin \Theta - \frac{d\xi}{d\sigma_1}\right) \cos \Theta .$$

Der Vergleich dieser Darstellung von p mit der Darstellung: $p = p_1 \sin^2 \Theta + p_2 \cos^2 \Theta$ lehrt, daß:

$$\Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_1} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma_2} = p_1, \quad \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_2} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma_1} = -p_2,$$

$$\Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_1} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma_1} = \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_2} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma_2} \text{ ist.}$$

Die Werte p_1 und p_2 sind die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} L + \lambda E & N + \lambda F \\ M + \lambda F & N + \lambda G \end{vmatrix} = 0,$$

sodaß

$$p_1 + p_2 = \frac{2FM - EN - GL}{EG - F^2}, \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

ist.

Die Beziehung: $p = p_2 \cos^2 \Theta + p_1 \sin^2 \Theta$ erläuterte Sannia geometrisch in der folgenden Weise: Er errichtete auf einem Strahl der Kongruenz in einem beliebigen Punkte die senkrechte Ebene. Diese wird von allen Zentralebenen, deren Träger der Strahl ist, in einem Geradenbüschel geschnitten. Wenn nun auf jeder Geraden dieses Büschels vom Strahl aus jeweils $\frac{1}{\sqrt{|p|}}$ abgetragen wird, bilden die Endpunkte der erhaltenen Strecken eine Ellipse oder ein Paar konjugierter Hyperbeln, jenachdem p_1 und p_2 gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dabei werden p_1 und p_2 als von Null verschieden vorausgesetzt. Im ersteren Falle heißt der Strahl elliptisch, im letzteren Falle hyperbolisch. Jedem Durchmesser der Indikatrix entspricht ein bestimmter Nachbarstrahl. Den Hauptachsen der Indikatrix entsprechen die stets reellen, orthogonalen Distributionsstrahlenflächen, denjenigen beiden Durchmessern, welche die Achsenwinkel halbieren, entsprechen die stets reellen, orthogonalen Hauptstrahlenflächen. Ist der Strahl hyperbolisch, so entsprechen den Asymptoten der beiden konjugierten Hyperbeln die beiden abwickelbaren Strahlenflächen. Konjugierten Durchmessern entsprechen „konjugierte" Strahlenflächen, isoklinen Durchmessern, das heißt solchen, die zu den beiden Achsen der Indikatrix symmetrisch liegen und infolgedessen gleich lang sind, entsprechen „isokline" Strahlenflächen, deren Distributionsparameter gleich sind. Wenn Sannia von dem Winkel spricht, unter dem zwei durch einen Strahl gehende Strahlenflächen sich schneiden, meint er den Winkel, unter dem ihre Zentralebenen sich schneiden.

Wir schließen diese Ausführungen mit der Darstellung der Abszisse r durch den Winkel Θ. Bei Verwendung der Bogenlänge σ hat man:

$$-r = \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma} \frac{d\xi}{d\sigma} - \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_1} \frac{d\xi}{d\sigma_1} \sin^2 \Theta$$

$$+ \left(\Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_1} \frac{d\xi}{d\sigma_2} + \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_2} \frac{d\xi}{d\sigma_1} \right) \sin \Theta \cos \Theta$$

$$+ \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_2} \frac{d\xi}{d\sigma_2} \cos^2 \Theta,$$

das heißt nach dem Früheren:

$$-r = \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_1} \frac{d\xi}{d\sigma_1} + (p_1 - p_2) \sin \Theta \cos \Theta.$$

Den äußersten Werten von r entsprechen die Werte

$$\frac{\pi}{4} \text{ und } -\frac{\pi}{4} \text{ von } \Theta.$$

Wir setzen: $$-r_2 = \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_1} \frac{d\xi}{d\sigma_1} + \frac{p_1 - p_2}{2},$$

$$-r_1 = \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_1} \frac{d\xi}{d\sigma_1} - \frac{p_1 - p_2}{2},$$

so daß: $$r_1 + r_2 = -2 \Sigma \frac{dx_0}{d\sigma_1} \frac{d\xi}{d\sigma_1},$$

$$r_1 - r_2 = p_1 - p_2$$

ist, und erhalten:

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{r_1 - r_2}{2} \sin 2\Theta.$$

Die Vergleichung dieser Beziehung mit der Hamiltonschen:

$$r = r_1 \cos^2 \omega + r_2 \sin^2 \omega$$

zeigt, daß $\sin 2\Theta = -\cos 2\omega$ ist, so daß allgemein $\omega = \Theta + \frac{\pi}{4}$ gesetzt werden darf.

Die Theorie Sannias wurde durch den Japaner K. Ogura vervollständigt und zwar durch Anwendung Jakobischer Formen [6] und [7]. Für Flächen und Strah-

[6]) Kinnosuke Ogura: On the differential geometry of a line congruence. Science reports of the Tôhoku Imperial University. Series I. Vol. V. S. 107, 1916.

[7]) Kinnosuke Ogura: Some theorems concerning binary quadratic forms and their application of the differential geometry, ibid. p. 95, 1916.

lensysteme stellte Ogura ein vollständiges System von je fünf Jakobischen Formen auf, die gleich Null gesetzt, je fünf quadratische Differentialgleichungen erster Ordnung liefern. Diese stellen fünf verschiedene Systeme von Flächenkurven, beziehungsweise fünf verschiedene Systeme von Strahlenflächen mit je zwei Scharen dar, wobei eine vollkommene Analogie zwischen den ersteren und letzteren stattfindet. Für die Strahlensysteme benutzte Ogura als Jakobische Formen nullter Art die erste Kummersche Grundform:

$$f_1 \equiv E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2 .$$

und die zweite Sanniasche Grundform:

$$f_2 \equiv L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Die Gleichung $f_1 = 0$ stellt die beiden Scharen von Strahlenflächen dar, deren sphärische Abbildungen die Minimallinien der Einheitskugel sind. Da sie imaginär sind, haben sie nur formale Bedeutung.

Die Gleichung $f_2 = 0$ drückt das Verschwinden des Distributionsparameters aus und stellt deshalb die zwei Scharen von abwickelbaren Strahlenflächen dar, die für ein hyperbolisches Strahlensystem reell sind.

Die Jakobische Form erster Art lautet:

$$J(f_1, f_2) \equiv \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix}$$

Die Gleichung: $J(f_1, f_2) =$ oder:
$(EM - FL)\ du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0$
stellt die beiden Scharen der stets reellen, orthogonalen Distributionsstrahlenflächen dar.

Die Jakobischen Formen zweiter Art lauten:

$$J(f_1, J(f_1, f_2)) \quad \text{und} \quad J(f_2, J(f_1, f_2)).$$

Erstere, entwickelt und gleich Null gesetzt, liefert die Differentialgleichung:

$$\left\{ \frac{1}{2} E(EN - GL) - F(EM - FL) \right\} du^2$$
$$+ \left\{ E(FN - GM) - G(EM - FL) \right\} du\,dv$$
$$+ \left\{ F(FN - GM) - \frac{1}{2} G(EN - GL) \right\} dv^2$$
$$= 0.$$

Dies ist die Gleichung der stets reellen, orthogonalen Hauptstrahlenflächen.

Letztere, entwickelt und gleich Null gesetzt, liefert die Differentialgleichung:

$$\left\{\frac{1}{2}(L(EN-GL)-M(EM-FL)\right\}\ du^2$$
$$+\left\{\ L(FN-GM)-N(EM-FL)\ \right\}du\,dv$$
$$+\left\{\ M(FN-GM)-\frac{1}{2}N(EN-GL)\ \right\}\ dv^2$$
$$=0.$$

Diese Gleichung stellt eine neue Art von Strahlenflächen dar, welche von Ogura eingeführt sind. Es sind die sogenannten charakteristischen Strahlenflächen. Man kann die vorstehende Gleichung auf die Form bringen:

$$(LN-M^2)(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)$$
$$+\frac{1}{2}(2FM-EN-GL)(L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2)=0,$$

oder: $p_1 . p_2-\frac{1}{2}(p_1+p_2)\ (p_2\cos^2\Theta+p_1\sin^2\Theta)=0,$

das heißt: $p=\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$, sowie: $tg^2\Theta=\frac{p_2}{p_1}$.

Die charakteristischen Strahlenflächen sind für ein elliptisches Strahlensystem reell, für ein hyperbolisches imaginär. Ihre Fortschreitungsrichtungen entsprechen den beiden konjugierten Durchmessern der Sanniaschen Indikatrix, die zu den Achsen derselben symmetrisch liegen und den kleinsten Winkel bilden, den konjugierte Durchmesser der Ellipse miteinander bilden können.

Auf die charakteristischen Strahlenflächen und die Brennstrahlenflächen, welch letztere mit den abwickelbaren Strahlenflächen identisch sind, und für welche die Beziehungen gelten:

$$tg^2\Theta=-\frac{p_2}{p_1}\ \text{und}\ p=0,$$

kommt man, wie R. v. Lilienthal bemerkt hat, auf einfache Weise von folgendem Gesichtspunkte aus: Einer beliebig gewählten Kurvenschar auf der Einheitskugel mit der Bogenlänge σ ordnet man eine zweite Schar mit der Bogenlänge s durch die Gleichung zu:

$$L\frac{du}{d\sigma}\frac{du}{ds}+M\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{dv}{ds}+\frac{du}{ds}\frac{dv}{d\sigma}\right)+N\frac{dv}{d\sigma}\frac{dv}{ds}=0,$$

womit in jedem Punkte (ξ, η, ζ) der Einheitskugel eine Tangenteninvolution und dementsprechend um den Strahl (ξ, η, ζ) als Achse eine Ebeneninvolution festgelegt ist.

Für $\frac{du}{ds} = u'_1 \sin T + u'_2 \cos T,$

$\frac{dv}{ds} = v'_1 \sin T + v'_2 \cos T$

erhält die Gleichung unserer Involution die Gestalt:

$$\operatorname{tg} \Theta \,.\, \operatorname{tg} T = - \frac{p_2}{p_1} .$$

Im hyperbolischen Falle nehmen wir:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \sqrt{\frac{-p_2}{p_1}}, \quad \operatorname{tg} \Theta_2 = - \sqrt{\frac{-p_2}{p_1}}.$$

Hier liegt, wie bekannt, jedes Ebenenpaar (Θ, T) harmonisch zu dem Ebenenpaar (Θ_1, Θ_2), das heißt der Quotient der Teilverhältnisse der Ebenen (Θ), (T) hinsichtlich des Paares (Θ_1, Θ_2) ist gleich — 1; man hat nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg} \Theta - \operatorname{tg} \Theta_1}{\operatorname{tg} \Theta - \operatorname{tg} \Theta_2} : \frac{\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} \Theta_1}{\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} \Theta_2} = - 1.$$

Im elliptischen Falle nehmen wir:

$$\operatorname{tg} \Theta_3 = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \quad \operatorname{tg} \Theta_4 = - \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}$$

Hier liegt nun das Ebenenpaar (Θ, T) so, daß das Produkt der Teilverhältnisse der Ebenen (Θ), (T) hinsichtlich des Ebenenpaares (Θ_3, Θ_4) gleich — 1 ist; denn man hat:

$$\frac{\operatorname{tg} \Theta - \operatorname{tg} \Theta_3}{\operatorname{tg} \Theta - \operatorname{tg} \Theta_4} \cdot \frac{\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} \Theta_3}{\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} \Theta_4} = - 1.$$

Umgekehrt ist das Ebenenpaar (Θ_3, Θ_4) durch die Forderung, daß das Produkt der Teilverhältnisse der Ebenen (Θ), (T) hinsichtlich des Paares (Θ_3, Θ_4) gleich — 1 sein soll, eindeutig bestimmt. Damit nämlich die durch:

$$\frac{(\operatorname{tg} \Theta - \operatorname{tg} \Theta')\ (\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} \Theta')}{(\operatorname{tg} \Theta - \operatorname{tg} \Theta'')\ (\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} \Theta'')} = - 1$$

festgelegte Involution mit der durch:

$$\operatorname{tg}\Theta \,.\, \operatorname{tg} T = -\frac{p_2}{p_1}$$

festgelegten identisch sei, muß:

$$\operatorname{tg}\Theta' + \operatorname{tg}\Theta'' = 0 \quad \text{und} \quad -2\frac{p_2}{p_1} + \operatorname{tg}^2\Theta' - \operatorname{tg}^2\Theta'' = 0$$

sein, woraus

$$\operatorname{tg}\Theta' = \operatorname{tg}\Theta_3, \quad \operatorname{tg}\Theta'' = \operatorname{tg}\Theta_4 \text{ folgt.}$$

§ 2.

Das Zylindroid als Schraubungsachsenfläche. Die kinematische Bedeutung des Distributionsparameters.

Die Kinematik lehrt, daß man eine Strecke auf einer Erzeugenden einer nicht abwickelbaren geradlinigen Fläche in eine beliebige Strecke von gleicher Länge auf der unendlich benachbarten Erzeugenden durch einfach unendlich viele Schraubungen, deren Achsen ein Zylindroid bilden, überführen kann.[8]). Werden diese Strecken von zwei senkrechten Durchdringungskurven der Erzeugenden der betrachteten Fläche begrenzt, so steht die Achse des genannten Zylindroids auf der Fläche, im Schnittpunkte ihrer Striktionslinie mit der ersten der genannten Erzeugenden senkrecht. Außerdem wird sie von dieser Erzeugenden halbiert, und die Maßzahl ihrer Länge ist gleich dem absoluten Wert des Distributionsparameters der betrachteten Fläche.[9])

Legen wir den Koordinatenanfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems in den Striktionspunkt der betrachteten Erzeugenden der nicht abwickelbaren gradlinigen Fläche, die x-Achse in die Erzeugende, die y-Achse in diejenige Gerade, auf welcher der kürzeste Abstand zwischen der Erzeugenden und der unendlich benachbarten Erzeugenden liegt,

[8]) R. v. Lilienthal: „Vorlesungen über Differentialgeometrie". I. Bd. § 30, S. 321—330.

[9]) R. v. Lilienthal: „Vorlesungen über Differentialgeometrie". II. Bd. § 9, S. 97 u. 98.

die z-Achse in die Normale der Fläche, dann lautet die Gleichung des oben genannten Zylindroids:

$$z(x^2 + y^2) = p\,x\,y,$$

wo p der Distributionsparameter der nicht abwickelbaren gradlinigen Fläche ist. Für abwickelbare Flächen gibt es kein derartiges Zylindroid, weil ihr Distributionsparameter gleich Null ist.

Die nicht abwickelbare geradlinige Fläche sei mittels zweier Parameter u und v durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = f_1 + u\lambda_1,\ y = f_2 + u\lambda_2,\ z = f_3 + u\lambda_3.$$

Die Größen f und λ seien Funktionen von v, f_1, f_2, f_3 die Koordinaten einer auf der Fläche verlaufenden Kurve, die von sämtlichen Erzeugenden der Fläche geschnitten wird, λ_1, λ_2, λ_3 die Richtungskosinus der Erzeugenden, u sei die auf einer Erzeugenden gemessene Entfernung eines Flächenpunktes von der eben genannten Kurve auf der Fläche.

Irgend eine andere Kurve auf der Fläche, die ihre sämtlichen Erzeugenden schneidet, habe die Gleichungen:

$$x = f_1 + \tau\lambda_1,\ y = f_2 + \tau\lambda_2,\ z = f_3 + \tau\lambda_3,$$

wo τ ebenfalls eine Funktion von v sei.

Werden von dieser Kurve aus, nach derselben Seite hin, auf allen Erzeugenden der Fläche Strecken c von gleicher Länge abgetragen, so entsteht eine weitere Kurve auf der Fläche, die von den Endpunkten der Strecken c gebildet wird. Die Gleichungen dieser Kurve lauten:

$$x = f_1 + (\tau + c)\lambda_1,\ y = f_2 + (\tau + c)\lambda_2,$$
$$z = f_3 + (\tau + c)\lambda_3.$$

Allgemein geht die Achse des Zylindroids, dessen Erzeugenden die Schraubungsachsen bilden, durch den Mittelpunkt der kleinsten Verrückungsstrecke. Dies ist die kürzeste von allen Strecken, die entstehen, wenn der Ort eines jeden Punktes auf der zu bewegenden Strecke vor der Schraubung mit seinem Orte nach der Schraubung verbunden wird. Die Maßzahl der Länge der Zylindroidachse ist

$$\sqrt{p^2 + q^2},$$

wo $p = \dfrac{\tau' + \Sigma f'_1 \lambda_1}{\sqrt{\Sigma (\lambda'_1)^2}}$ und $q = \dfrac{-k}{\Sigma (\lambda'_1)^2}$ ist.

Es ist $k = \Sigma f'_1 (\lambda_2 \lambda'_3 - \lambda_3 \lambda'_2)$, wo die Striche die erste Abteilung nach v bedeuten. Nun fällt der Mittelpunkt der kleinsten Verrückungsstrecke in den Striktionspunkt, nämlich in jenen Punkt, wo die Striktionslinie der Fläche diejenige Erzeugende trifft, worauf die zu bewegende Strecke liegt, wenn $\Sigma f'_1 \lambda'_1 = 0$ ist. Diese Gleichung drückt die Bedingung aus, daß die Kurve auf der Fläche: $x = f_1$, $y = f_2$, $z = f_3$ deren Striktionslinie ist.[10]). Außerdem fällt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die Zylindroidachse in die Flächennormale.

$q = -\frac{k}{\Sigma (\lambda'_1)^2}$ ist der Distributionsparameter der Fläche[11]). Verfügen wir so über τ, daß $\tau' + \Sigma f'_1 \lambda_1 = 0$ wird, so wird die Maßzahl der Zylindroidachse gleich dem absoluten Wert des Distributionsparameters der Fläche. Die letzte Gleichung drückt aber die Bedingung aus, daß die Kurve: $x = f_1 + \tau \lambda_1$, usw. eine senkrechte Durchdringungskurve der Erzeugenden der Fläche sei. Nach einem bekannten Satze über geradlinige Flächen muß dann auch die Kurve: $x = f_1 + (\tau + c) \lambda_1$, usw. eine senkrechte Durchdringungskurve aller Erzeugenden der Fläche sein.

Als Beispiel diene die Binormalenfläche; sie ist eine nicht abwickelbare geradlinige Fläche. Die Kurve, deren Binormalen die Erzeugenden der Fläche sind, möge die Gleichungen haben:

$$x = f_1(s), \quad y = f_2(s), \quad z = f_3(s),$$

wo s die Bogenlänge bedeutet. Die Richtungskosinus der Tangente dieser Kurve seien: α, β, γ, die der Hauptnormalen: l, m, n, die der Binormalen: λ, μ, ν. Der Radius der ersten Krümmung der Kurve sei ϱ, der der zweiten Krümmung r.

Es ist: $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \mu$, $\lambda_3 = \nu$. Wenn wir die erste Ableitung nach s mit einem Strich bezeichnen, so gelten die aus der Flächentheorie bekannten Formeln:

[10]) R. v. Lilienthal: „Vorlesungen über Differentialgeometrie", I. Bd. § 9, S. 220.

[11]) R. v. Lilienthal: „Vorlesungen über Differentialgeometrie", II. Bd. § 9, S. 93.

$$\lambda'_1 = \frac{l}{r}, \quad \lambda'_2 = \frac{m}{r}, \quad \lambda'_3 = \frac{n}{r}.$$

Ferner:

$$f'_1 = \alpha, \quad f'_2 = \beta, \quad f'_3 = \gamma.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\Sigma f'_1 \lambda'_1 = \frac{\Sigma \alpha l}{r} = 0.$$

Die Kurve (f_1, f_2, f_3) ist also Striktionslinie der Binormalenfläche. Ferner ist:

$$\Sigma f'_1 \lambda_1 = \Sigma \alpha \lambda = 0.$$

Da die Kurve (f_1, f_2, f_3) ihre Binormalen senkrecht durchdringt, setzen wir $\tau = 0$, woraus sich $\tau' + \Sigma f'_1 \lambda_1 = 0$ ergibt. Um den Distributionsparameter der Binormalenfläche zu erhalten, müssen wir noch k berechnen. Man findet:

$$k = \Sigma f'_1 (\lambda_2 \lambda'_3 - \lambda_3 \lambda'_2) = \Sigma \alpha \frac{\mu n - \nu m}{r} = \Sigma \frac{-\alpha^2}{r} = -\frac{1}{r}.$$

Mithin ist der absolute Wert des Distributionsparameters der Binormalenfläche, da $\Sigma (\lambda'_1)^2 = \frac{1}{r^2}$ ist, gleich dem absoluten Wert von r, also gleich dem absoluten Wert des Radius der zweiten Krümmung jener Kurve, durch deren Binormalen die Fläche gebildet wird. Die Gleichung des Zylindroids der Binormalenfläche lautet demnach:

$$z (x^2 + y^2) = - r x y.^{12})$$

In entsprechender Weise findet man für den absoluten Wert des Distributionsparameters der Hauptnormalenfläche:

$$\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}}$$

12) R. v. Lilienthal: „Vorlesungen über Differentialgeometrie", I. Bd., § 29, S. 321.

§ 3.

Die Untersuchung des Ortes der Endpunkte der Zylindroidachsen aller durch einen Strahl eines allgemeinen Strahlensystems hindurchgelegten Strahlenflächen.

Es soll jetzt die kinematische Bedeutung des Distributionsparameters für die Theorie der Strahlensysteme nutzbar gemacht werden. Zu jeder durch einen regulären Strahl eines Strahlensystems gelegten, nicht abwickelbaren Strahlenfläche gehört ein Zylindroid von der oben beschriebenen Art, dessen Achse auf dem Strahl im zugehörigen Striktionspunkt senkrecht steht, in die Normale der zugehörigen Strahlenfläche fällt und vom Strahl halbiert wird. Die Maßzahl ihrer Länge ist jeweils gleich dem absoluten Wert des Distributionsparameters der betreffenden Strahlenfläche.

Wir wollen jetzt die Kurve untersuchen, die von den Endpunkten der Zylindroidachsen aller durch einen Strahl eines Strahlensystems hindurchgehenden Strahlenflächen gebildet wird. Es leuchtet ein, daß sie um einen elliptischen Strahl anders verläuft, als um einen hyperbolischen Strahl. Im ersteren Falle hält sie sich stets um eine endliche Strecke von dem Strahl entfernt, im letzteren geht sie in den Brennpunkten durch den Strahl hindurch. Tragen wir auf jeder im Striktionspunkt errichteten Flächennormale vom Strahl aus nur nach einer Seite die halbe Maßzahl des jeweiligen Distributionsparameters ab, so windet sich die Kurve halb um den Strahl herum; geschieht es nach beiden Seiten, so ist sie in sich geschlossen und liegt auf einer Rotationsfläche, die den Strahl zur Achse hat. Es ist zweckmäßig, die Abtragungen, statt auf den Flächennormalen, auf den dazu senkrechten Geraden, worauf die kürzesten Abstände zwischen dem Strahl und den unendlich benachbarten Strahlen liegen, vor-

zunehmen. Das bedeutet nur eine Vierteldrehung der ganzen Kurve um den Strahl.

Um die Kurven der Endpunkte der Zylindroidachsen analytisch darzustellen, wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem die Punktkoordinaten der Einfachheit wegen wieder mit x, y, z bezeichnet werden sollen, das also mit dem ursprünglich zu Grunde gelegten x, y, z-System nicht verwechselt werden darf. Der Anfangspunkt des neuen Systems falle mit dem Mittelpunkt des Strahles (ξ, η, ζ) zusammen, der Strahl selbst mit der z-Achse, die x-Achse enthalte den zu $\Theta = 0$, die y-Achse den zu $\Theta = \frac{\pi}{2}$ gehörenden kürzesten Abstand. Die Gleichungen unserer Kurve sind dann:

$$x = \frac{p}{2} \cos\Theta, \quad y = \frac{p}{2} \sin\Theta, \quad z = r,$$

$$\text{und da: } p = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2} \cos 2\Theta$$

und wegen: $r_1 + r_2 = 0$

$$r = \frac{p_2 - p_1}{2} \sin 2\Theta \text{ ist,}$$

erhalten wir als Gleichungen unserer Kurve:

$$x = \frac{1}{4}\left\{H + (p_2 - p_1)\cos 2\Theta\right\} \cos\Theta,$$

$$y = \frac{1}{4}\left\{H + (p_2 - p_1)(\cos 2\Theta\right\} \sin\Theta,$$

$$z = \frac{p_2 - p_1}{2} \sin 2\Theta,$$

wo $H = p_1 + p_2$ ist. Dementsprechend nehmen wir abkürzend: $K = p_1 \cdot p_2$.

Weil $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$ nicht gleichzeitig verschwinden können, kann nur dann $x = y = 0$ werden, wenn $\cos 2\Theta = -\frac{H}{p_1 - p_2}$ ist, was nur für einen hyperbolischen Strahl, $(p_1 \cdot p_2 < 0)$ möglich ist. Die Kurve durchschneidet, wie schon bemerkt wurde, nur den hyperbolischen Strahl, und zwar in seinen Brennpunkten. Diese sind aber durch die letzte Gleichung: $\cos 2\Theta = -\frac{H}{p_1 - p_2}$ bestimmt, woraus sich der schon

früher genannte Wert $\operatorname{tg}\Theta = \pm\sqrt{\frac{-p_2}{p_1}}$ berechnen läßt.

Im Folgenden sind die Werte derveränderlichen Größen ω, Θ, p, r sowie die Koordinaten der entsprechenden Punkte auf der Kurve der Endpunkte der Zylindroidachsen für die bemerkenswerten Strahlenflächen zusammengestellt.

1. Die Hauptstrahlenflächen:

$$\omega = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{cases};\ \Theta = \mp\frac{\pi}{4};\ p = \frac{H}{2};\ x = \frac{H}{8}\sqrt{2};\ y = \mp\frac{H}{8}\sqrt{2}$$

$$z = r = \pm r_1.$$

2. Die Distributionsstrahlenflächen:

$$\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \end{cases};\ \Theta = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{cases};\ p = \begin{cases} p_2 \\ p_1 \end{cases};\ x = \begin{cases} \frac{p_2}{2} \\ 0 \end{cases};\ y = \begin{cases} 0 \\ \frac{p_1}{2} \end{cases}$$

$$z = r = 0.$$

3. Die charakteristischen Strahlenflächen:

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{p_1} \pm \sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1} \mp \sqrt{p_2}};\ \Theta = \operatorname{arc\,tg} \pm \sqrt{\frac{p_2}{p_1}};\ p = \frac{2K}{H};$$

$$x = \frac{K}{H}\sqrt{\frac{p_1}{H}};\ y = \pm\frac{K}{H}\sqrt{\frac{p_2}{H}};\ z = r = \pm\frac{p_2 - p_1}{H}\sqrt{K}.$$

4. Die abwickelbaren Strahlenflächen:

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{p_1} \pm \sqrt{-p_2}}{\sqrt{p_1} \mp \sqrt{-p_2}};\ \Theta = \operatorname{arc\,tg} \pm \sqrt{\frac{-p_2}{p_1}};\ p = 0.$$

$$x = y = 0;\ z = r = \pm\sqrt{-K}.$$

Die „Kurve der Endpunkte", wie wir sie kurz nennen wollen, verläuft auf einem Zylindroid, dessen Erzeugende die die kürzesten Abstände zwischen dem betrachteten Stahl und den unendlich benachbarten Strahlen enthaltenden Geraden sind. Um die Gleichung dieses Zylindroids zu erhalten, teilen wir die erste Gleichung unserer Kurve durch die zweite. Dies gibt:

$$\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} = \frac{x}{y}.$$

Aus der letzten Gleichung der Kurve bilden wir:

$$\sin\Theta \,.\, \cos\Theta = \frac{z}{p_2 - p_1}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\cos^2\Theta = \frac{xz}{y\,(p_2 - p_1)} \text{ und } \sin^2\Theta = \frac{yz}{x\,(p_2 - p_1)}.$$

Hieraus ergibt sich als Gleichung des Zylindroids:

$$z\,(x^2 + y^2) = -\,2\,r_1\,x\,y.$$

Wir wissen auch, daß die Kurve der Endpunkte auf einer Rotationsfläche liegt, dessen Achse der Strahl ist. Die Gleichung derselben erhalten wir in folgender Weise: Wenn wir die beiden ersten Gleichungen unserer Kurve quadrieren und addieren, sodann den aus ihrer dritten Gleichung sich ergebenden Wert

$$\cos 2\Theta = \frac{\sqrt{(p_2 - p_1)^2 - 4\,z^2}}{p_2 - p_1}$$

rechts einsetzen, erhalten wir:

$$(p_2 - p_1)^2 \cos^2 2\Theta = 16\,(x^2 + y^2) - H^2 - 2\,H\,\sqrt{(p_2 - p_1)^2 - 4\,z^2}.$$

Addieren wir hierzu die Gleichung:

$$(p_2 - p_1)^2 \sin^2 2\Theta = 4\,z^2,$$

so erhalten wir als Gleichung der Rotationsfläche:

$$16\,(x^2 + y^2)^2 + z^4 + 8\,(x^2 + y^2)\,z^2 - 4\,(x^2 - y^2)\,(H^2 - 2\,K) + 2\,z^2\,K + K^2 = 0.$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades. Die durch sie dargestellte Rotationsfläche liegt symmetrisch zu allen drei Koordinatenebenen. Für einen elliptischen Strahl ist sie ringartig, für einen hyperbolischen Strahl besteht sie aus zwei Mänteln, einem inneren und einem äußeren. Unsere Kurve ist die Durchdringungskurve des Zylindroids und der Rotationsfläche; sie ist von der sechsten Ordnung. Setzt man nämlich die Gleichungen unserer Kurve in die Gleichung der Ebene: $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ ein, führt man ferner in der erhaltenen Gleichung die vorkommenden trigonometrischen Funktionen von Θ auf eine einzige, etwa $\cos\Theta$, zurück, so ergibt sich nach Fortschaffung der Quadrat-

wurzel eine Gleichung, welche in bezug auf cos Θ vom sechsten Grade ist.

Um einen elliptischen Strahl windet sich die Kurve, den Erhebungen und Vertiefungen des Zylindroids folgend, wie eine Girlande herum, ohne mit dem Strahl in Berührung zu kommen. Um einen hyperbolischen Strahl nimmt sie, weil sie durch jeden Brennpunkt des Strahles zweimal hindurchgeht, einen komplizierten Verlauf. In Polarkoordinaten (r, Θ) lautet die Gleichung der senkrechten Projektion unserer Kurve in die x, y - Ebene oder überhaupt in eine zum Strahl senkrechte Ebene: $r = \frac{1}{4}\left\{H + (p_2 - p_1)\cos 2\,\Theta\right\}$.

Nach dieser Gleichung läßt sich diese Projektion der Kurve, wenn für p_1 und p_2 feste Werte angenommen werden, leicht konstruieren. Für einen hyperbolischen Strahl erhält man ein „Vierblatt" mit kongruenten gegenüberliegenden Blättern, die je nach den vorgelegten Maßzahlen von p_1 und p_2 verschieden gestaltet sind. Die Blattachsen fallen in die x- und y-Achse. Für einen elliptischen Strahl erhält man je nach den vorgelegten Maßzahlen von p_1 und p_2 eine ellipsenähnliche Figur, die zur x- und y-Achse symmetrisch liegt und auf einer dieser beiden Achsen eingebuchtet ist. In Cartesischen Koordinaten lautet die Gleichung der Projektion unserer Kurve in die x, y-Ebene:

$$16\,(x^2 + y^2)^3 - H^2\,(x^2 + y^2)^2 - 2\,(p^2_2 - p^2_1)\,(x^4 - y^4) - (p_2 - p_1)^2\,(x^2 - y^2)^2 = 0.$$

Es sollen jetzt die Richtungskosinus der Tangente der Kurve der Endpunkte berechnet werden. Wenn s die Bogenlänge einer Raumkurve bedeutet, lauten die Richtungskosinus der Tangente derselben bekanntlich:

$$\alpha = \frac{dx}{ds},\ \beta = \frac{dy}{ds},\ \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Wir können alle Abteilungen der Koordinaten x, y, z unserer Kurve nach s als Funktionen von Θ berechnen mittels der Gleichungen: $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\Theta} : \frac{ds}{d\Theta}$, usw.

Man findet:

$$\frac{dx}{d\Theta} = \frac{1}{4}\left\{-H\sin\Theta - (p_2 - p_1)(\sin 3\Theta + \cos\Theta \sin 2\Theta)\right\};$$

$$\frac{dy}{d\Theta} = \frac{1}{4}\left\{H\cos\Theta + (p_2 - p_1)(\cos 3\Theta - \sin\Theta \sin 2\Theta)\right\};$$

$$\frac{dz}{d\Theta} = (p_2 - p_1)\cos 2\Theta.$$

Hieraus:

$$\frac{ds}{d\Theta} = \sqrt{\Sigma\left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^2}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left\{H + (p_2 - p_1)\cos 2\Theta\right\}^2 + 4(p_2 - p_1)^2(1 + 3\cos^2 2\Theta)}.$$

Bezeichnet man den positiven Wert dieser Quadratwurzel mit w, so erhält man für die Richtungskosinus der Tangente unserer Kurve:

$$\alpha = \frac{-H\sin\Theta - (p_2 - p_1)(\sin 3\Theta + \cos\Theta \sin 2\Theta)}{w};$$

$$\beta = \frac{H\cos\Theta + (p_2 - p_1)(\cos 3\Theta - \sin\Theta \sin 2\Theta)}{w};$$

$$\gamma = \frac{4(p_2 - p_1)\cos 2\Theta}{w}.$$

An besonderen Werten ergeben sich hieraus für die eine der Distributionsstrahlenflächen ($\Theta = 0$):

$$\alpha = 0;\ \beta = \frac{p_2}{\sqrt{4p_1^2 - 8K + 5p_2^2}};$$

$$\gamma = \frac{2(p_2 - p_1)}{\sqrt{4p_1^2 - 8K + 5p_2^2}}.$$

In diesem Punkte steht die Tangente auf der x-Achse senkrecht.

Für die andere ($\Theta = \frac{\pi}{2}$):

$$\alpha = \frac{-p_1}{\sqrt{5p_1^2 - 8K + 4p_2^2}};$$

$$\beta = 0;\ \gamma = \frac{2(p_1 - p_2)}{\sqrt{5p_1^2 - 8K + 4p_2^2}}.$$

In diesem Punkte steht die Tangente auf der y-Achse senkrecht.

Für die beiden Hauptstrahlenflächen ($\Theta = \pm\frac{\pi}{2}$):

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}\,(p_1 - 3\,p_2)}{2\sqrt{5\,H^2 - 16\,K}};\quad \beta = \frac{\sqrt{2}\,(3\,p_1 - p_2)}{2\sqrt{5\,H^2 - 16\,K}};\quad \gamma = 0.$$

In diesen beiden Punkten steht die Tangente auf der z-Achse senkrecht; beide Tangenten liegen also in den Grenzebenen des Zylindroids.

Für die abwickelbaren Strahlenflächen hat man:

$$\alpha = \pm p_1\sqrt{\frac{-p_2}{p_1^3 - p_2^3}};\quad \beta = p_2\sqrt{\frac{p_1}{p_1^3 - p_2^3}};$$

$$\gamma = -H\sqrt{\frac{p_1 - p_2}{p_1^3 - p_2^3}}.$$

Für die beiden charakteristischen Strahlenflächen:

$$\alpha = \frac{\pm\sqrt{p_2}\,(p_1^2 - 2\,K)}{\sqrt{H^5 - 7\,H^3\,K + 13\,H\,K^2}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{p_1}\,(2\,K - p_2^2)}{\sqrt{H^5 - 7\,H^3\,K + 13\,H\,K^2}};$$

$$\gamma = \frac{-(p_1 - p_2)^2\,\sqrt{H}}{\sqrt{H^5 - 7\,H^3\,K + 13\,H\,K^2}}.$$

Die Bogenlänge der Kurve der Endpunkte ist:

$$s = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} w\,d\,\Theta,$$

wo w die oben genannte Quadratwurzel bedeutet. Die erste Krümmung unserer Kurve berechnen wir mittels der Formel:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{\Sigma\,(y'\,z'' - y''\,z')^2}}{(\Sigma\,x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wo die Striche die erste und zweite Ableitung nach Θ bedeuten. Die umständliche Rechnung liefert einen sehr umfangreichen Ausdruck, den wir übergehen. Es sei nur bemerkt, daß er eine Funktion von $2\,\Theta$ allein ist. Im übrigen ergeben sich für die Krümmung der Kurve keine Besonderheiten; sie weist keine singuläre Stelle auf. In der Rechnung zeigt sich, daß die Determinante: $y'\,z'' - y''\,z'$ den Faktor $\sin\Theta$, die Determinante: $z'\,x'' - z''\,x'$ den Faktor $\cos\Theta$ enthält,

woraus hervorgeht, daß $\frac{1}{\varrho}$ nirgends gleich Null wird. Die äußersten Werte von $\frac{1}{\varrho}$ weisen die Stellen $\Theta = 0$ und $\Theta = \frac{\pi}{2}$ auf, die den Distributionsstrahlenflächen entsprechen. Dieses ist nach der Entstehung der Kurve ohne weiteres klar. Die Rechnung bestätigt es auch. Setzt man die erste Ableitung von $\frac{1}{\varrho}$ nach 2Θ gleich Null, kommt man zu der Gleichung: $\sin 2\Theta = 0$, welcher die Werte $\Theta = 0$ und $\frac{\pi}{2}$ genügen.

§ 4.

Anwendung auf die Normalenkongruenz. (H = o).

In einer „Normalenkongruenz" schneiden die Strahlen der Kongruenz die Einzelflächen einer Flächenschar senkrecht. Hier fallen die Brennstrahlenflächen mit den Hauptstrahlenflächen zusammen. Es muß also p für $\Theta = \pm \frac{\pi}{4}$ verschwinden. Dies gibt:

$$H = p_1 + p_2 = 0,\quad K = -p_1^2 = -p_2^2,\quad p = p_2 \cos 2\Theta.$$

Die Sanniasche Indikatrix besteht aus einem Paare gleichseitiger konjugierter Hyperbeln. Die Gleichungen der Kurve der Endpunkte lauten jetzt:

$$x = \frac{p_2}{2} \cos 2\Theta \,.\, \cos\Theta,$$

$$y = \frac{p_2}{2} \cos 2\Theta \,.\, \sin\Theta,$$

$$z = p_2 \sin 2\Theta.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen den Parameter Θ, so erhält man sowohl die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \left(\frac{p_2}{2}\right)^2$$

als auch die Gleichung:

$$z\,(x^2 + y^2) = 2\,p_2\,x\,y.$$

Erstere stellt ein verlängertes Rotationsellipsoid dar, das doppelt so lang als breit ist, dessen Mittelpunkt in den Koordinatenanfangspunkt, dessen Rotationsachse in die z-Achse fällt. Die Maßzahl seiner Länge ist gleich dem absoluten Betrage von $2p_2$. Letztere stellt ein Zylindroid dar, dessen Erzeugende die kürzesten Abstände zwischen dem Strahl und seinen unendlich benachbarten Strahlen enthalten. Auch sein Mittelpunkt fällt in den Koordinatenanfangspunkt, und seine Achse fällt mit der Rotationsachse des Rotationsellipsoids zusammen. Die Grenzpunkte des Zylindroids sind also die Endpunkte des Rotationsellipsoids. Die Kurve der Endpunkte ist die Schnittkurve der beiden Flächen. Ihr Verlauf gestaltet sich einfacher als im allgemeinen Strahlensystem. Sie besteht aus vier gleich langen Stücken, die von einem Endpunkte des Rotationsellipsoids zum andern laufen; jedes Stück kann durch eine halbe Umdrehung um die Rotationsachse in das gegenüberliegende überführt werden. Die senkrechte Projektion der Kurve in die x, y-Ebene läßt sich leicht aus der Gleichung: $x^2 + y^2 = \frac{p_2}{2} \cos 2\Theta$ konstruieren. Diese ist nämlich die Polargleichung der projizierten Kurve und stellt ein „Vierblatt" mit vier kongruenten Blättern dar, dessen Achsen in die x- und y-Achse fallen.

Die Richtungskosinus der Tangente der Kurve der Endpunkte sind:

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\sin 3\Theta + \sin 2\Theta \cos\Theta}{\sqrt{1 + \frac{13}{4}\cos^2 2\Theta}},$$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{\cos 3\Theta - \sin 2\Theta \sin\Theta}{\sqrt{1 + \frac{13}{4}\cos^2 2\Theta}},$$

$$\gamma = \frac{2\cos 2\Theta}{\sqrt{1 + \frac{13}{4}\cos^2 2\Theta}}.$$

Für die Distributionsstrahlenflächen hat man:

$$\text{für } \Theta = 0 : \alpha = 0, \beta = \frac{1}{\sqrt{17}}, \gamma = \frac{4}{\sqrt{17}};$$

$$\text{für } \Theta = \frac{\pi}{2} : \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \beta = 0, \gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Für die Hauptstrahlenflächen hat man:

$$\text{für } \Theta = +\frac{\pi}{4} : \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \beta = -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \gamma = 0;$$

$$\text{für } \Theta = -\frac{\pi}{4} : \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \beta = -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \gamma = 0.$$

Die Kurve durchsetzt die Koordinatenachsen rechtwinklig. Die Berechnung der Bogenlänge führt zu einem elliptischen Integral. Man findet:

$$s = p_2 \int \sqrt{1 + \tfrac{13}{4}\cos^2 2\Theta}\, d\Theta.$$

Setzt mann: $2\Theta = t$, so ist: $s = \frac{p_2}{2} \int \sqrt{1 + \frac{13}{4}\cos^2 t}\, dt$,

setzt man: $\cos t = x$, so ist: $s = -\frac{p_2}{2} \int \sqrt{\frac{1 + \frac{13}{4}x^2}{1 - x^2}}\, dx$.

Für die erste Krümmung erhält man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{4 p_2} \sqrt{\frac{425 - 66\sin^2 2\Theta - 39\sin^4 2\Theta}{(1 + \frac{13}{4}\cos^2 2\Theta)^3}}$$

Das Minimum liegt bei $\Theta = 0$ und $\frac{\pi}{2}$, das Maximum bei $\Theta = \pm\frac{\pi}{4}$, was man am Verlauf der Kurve auf dem Rotationsellipsoid ohne weiteres erkennt.

Es sollen jetzt die Richtungskosinus der Flächennormalen des Rotationsellipsoids und des Zylindroids längs der Kurve der Endpunkte sowie die Normalkrümmung dieser Kurve hinsichtlich der beiden Flächen berechnet werden. Stellen wir das Rotationsellipsoid mittels zweier Parameter u und v durch die Gleichungen:

$$x = \frac{p_2}{2}\cos u \cos v,\ y = \frac{p_2}{2}\cos u \sin v,\ z = p_2 \sin u$$

dar, so ist unsere Kurve auf ihm durch die Beziehung $u = 2v$ bestimmt. Man findet für die Richtungskosinus einer Flächennormale des Rotationsellipsoids längs unserer Kurve:

$$X = -\frac{2\cos 2\Theta \cos\Theta}{\sqrt{1+3\cos^2 2\Theta}},$$

$$Y = -\frac{2\cos 2\Theta \sin\Theta}{\sqrt{1+3\cos^2 2\Theta}},$$

$$Z = -\frac{\sin 2\Theta}{\sqrt{1+3\cos^2 2\Theta}}.$$

Die Richtungskosinus der Erzeugenden des Zylindroids sind: $\cos\Theta$, $\sin\Theta$, 0. Mithin ist der Winkel φ, unter dem die genannten Flächennormalen die Erzeugenden des Zylindroids schneiden, durch die Gleichung bestimmt:

$$\cos\varphi = \frac{-2\cos 2\Theta}{\sqrt{1+3\cos^2 2\Theta}}.$$

Für $\Theta = 0$ und $\frac{\pi}{2}$ fallen die beiden Geraden zusammen, wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird, im ersteren Falle mit entgegengesetzter, im letzteren mit gleicher Richtung. Für $\Theta = \pm\frac{\pi}{4}$ stehen beide aufeinander senkrecht.

Die Normalkrümmung einer Kurve hinsichtlich einer Fläche berechnet man nach der Formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

wo E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung, L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Fläche sind. Längs der Kurve der Endpunkte findet man:

$$E = \frac{p_2^2}{4}\sin^2 2\Theta + p^2{}_2\cos^2 2\Theta,\ F = 0,\ G = \frac{p_2^2}{4}\cos^2 2\Theta,$$

$$L = \frac{p_2}{\sqrt{1+3\cos^2 2\Theta}},\ M = 0,\ N = \frac{p_2\cos^2 2\Theta}{\sqrt{1+3\cos^2 2\Theta}}$$

Hieraus ergibt sich für die Normalkrümmung der Kurve:

$$\frac{1}{R} = \frac{4+\cos^2 2\Theta}{p_2\sqrt{1+3\cos^2 2\Theta}\,(1+\frac{13}{4}\cos^2 2\Theta)}$$

Dieser Ausdruck hängt von $\cos^2 2\Theta$ allein ab; deshalb ergeben sich gleiche Werte von $\frac{1}{R}$ für Θ, $\frac{\pi}{2} - \Theta$, $\pi - \Theta$ und $\pi + \Theta$. Die äußersten Werte von $\frac{1}{R}$ erhält man aus der Gleichung: $\sin 2\Theta \,.\, \cos 2\Theta = 0$; sie finden also statt für $\Theta = 0$ und $\frac{\pi}{2}$, beziehungsweise für: $\Theta = \pm\frac{\pi}{4}$.

Entsprechende Berechnungen sollen jetzt über das Zylindroid, auf dem unsere Kurve liegt, angestellt werden. Stellen wir dieses Zylindroid mittels zweier Parameter τ und Θ durch die Gleichungen:

$$x = \tau \,.\, m\cos\Theta,\quad y = \tau \,.\, m\sin\Theta,\quad z = p_2 \sin 2\Theta$$

dar, wo $m = p_2 \cos 2\Theta$ ist, so gehört unsere Kurve zu der Schar dar Parameterlinien $\tau = \text{const.}$, und zwar ist sie durch die Gleichung: $\tau = \frac{1}{2}$ bestimmt. Die Parameterlinien $\Theta = \text{const.}$ stellen bekanntlich die Erzeugenden des Zylindroids dar. Für die Richtungskosinus der Flächennormalen des Zylindroids längs der Kurve der Endpunkte findet man:

$$X' = \frac{4\sin\Theta}{\sqrt{17}},\quad Y' = \frac{-4\cos\Theta}{\sqrt{17}},\quad Z' = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Diese Flächennormalen des Zylindroids besitzen also eine konstante Neigung gegen die Achse des Zylindroids. Sie bilden in ihrer Gesamtheit eine nicht abwickelbare geradlinige Fläche „konstanter Neigung", wie sie K. Zindler[13]) nennt.

Im Punkte $\Theta = 0$ steht die Flächennormale des Zylindroids auf der Tangente an die Kurve der Endpunkte senkrecht, da erstere daselbst die Richtungskosinus: $0, \frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}$, letztere die Richtungskosinus: $0, \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}$ besitzt. Dasselbe gilt für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ und $\Theta = \pm\frac{\pi}{4}$.

[13]) K. Zindler: Liniengeometrie mit Anwendungen. 2. Teil, § 23.

Wir fragen jetzt nach dem Winkel φ, unter dem sich die Flächennormalen des Rotationsellipsoids und des Zylindroids längs der Kurve schneiden. Es ergibt sich:

$$\cos\varphi = -\frac{\sin 2\Theta}{\sqrt{17\,(1+3\cos^2 2\Theta)}}.$$

Man erkennt aus der Formel, daß die Flächennormalen der einen und andern Fläche niemals zusammenfallen können.

Es soll jetzt die Normalkrümmung der Kurve der Endpunkte hinsichtlich des Zylindroids berechnet werden. Wegen $d\tau = 0$ erhält man hierfür die einfache Formel:

$$\frac{1}{R'} = \frac{\mathcal{N}}{G}$$

Man findet für $\tau = \frac{1}{2}$:

$$\mathcal{N} = \frac{4\,p_2 \sin 2\Theta}{\sqrt{17}},\quad G = p^2{}_2\,(1 - \tfrac{13}{4}\cos^2 2\Theta).$$

Mithin ist:

$$\frac{1}{R'} = \frac{4\sin 2\Theta}{\sqrt{17}\,.\,p_2\,(1+\frac{13}{4}\cos^2 2\Theta)}.$$

Die Formel lehrt, daß für Θ, $\pi + \Theta$, $\frac{\pi}{2} - \Theta$ gleiche Werte, dagegen für isokline Strahlenflächen: Θ und $\pi - \Theta$ entgegengesetzt gleiche Werte von $\frac{1}{R'}$ stattfinden. Für $\Theta = 0$ und $\frac{\pi}{2}$ ist $\frac{1}{R'} = 0$. Dies kommt daher, weil die betreffenden Normalschnitte an diesen Stellen die positive x-Achse und die positive y-Achse senkrecht und infolgedessen das Zylindroid in Kurven durchschneiden, die daselbst Wendepunkte haben.

Es soll jetzt die geradlinige Fläche untersucht werden, deren Erzeugende die Flächennormalen des Zylindroids längs der Kurve der Endpunkte sind. Die Gleichungen dieser Fläche lauten:

$$x = f_1(\Theta) + \varkappa\,\lambda_1(\Theta),\ y = f_2(\Theta) + \varkappa\,\lambda_2(\Theta),$$
$$z = f_3(\Theta) + \varkappa\,\lambda_3(\Theta),$$

wo f_1, f_2, f_3 die Koordinaten der Kurve der Endpunkte, λ_1, λ_2, λ_3 die Richtungskosinus der Normalen des Zylindroids längs dieser Kurve bedeuten und $\varkappa$ einen Parameter bezeichnet. Man findet:

$$f'_1(\Theta) = -\frac{p_2}{2}(\sin 3\Theta + \sin 2\Theta \cos\Theta),$$

$$f'_2(\Theta) = \frac{p_2}{2}(\cos 3\Theta - \sin 2\Theta \sin\Theta),$$

$$f'_3(\Theta) = 2 p_2 \cos 2\Theta,$$

ferner:

$$\lambda'_1(\Theta) = \frac{4}{\sqrt{17}}\cos\Theta,\quad \lambda'_2(\Theta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\Theta,\quad \lambda'_3(\Theta) = 0.$$

Für den Ausdruck: $\Sigma f'_1(\lambda_2\lambda'_3 - \lambda_3\lambda'_2)$ ergibt sich der Wert: $2 p_2 \cos 2\Theta$. Unsere Fläche ist daher nicht abwickelbar. Für den zu Θ gehörenden Striktionspunkt hat man: $\varkappa = -\frac{\Sigma f'_1 \lambda'_1}{\Sigma (\lambda'_1)^2}$ [14]). Nun ist:

$$\Sigma f'_1 \lambda'_1 = -\frac{4 p_2}{\sqrt{17}}\sin 2\Theta,\quad \Sigma(\lambda'_1)^2 = \frac{16}{17},$$

$$\frac{\Sigma f'_1 \lambda'_1}{\Sigma(\lambda'_1)^2} = \frac{\sqrt{17}\, p_2 \sin 2\Theta}{4}.$$

Mithin lauten die Gleichungen der Striktionslinie unserer Fläche:

$$x = \frac{p_2}{2}(\cos\Theta + \sin\Theta \sin 2\Theta),$$

$$y = -\frac{p_2}{2}(\sin\Theta + \cos\Theta \sin 2\Theta),$$

$$z = \frac{5}{4} p_2 \sin 2\Theta.$$

Für den Distributionsparameter unserer Fläche, der bekanntlich nach der Formel:

$$p = -\frac{\Sigma f'_1(\lambda_2\lambda'_3 - \lambda_3\lambda'_2)}{\Sigma(\lambda'_1)^2}$$

zu berechnen ist, hat man den Wert:

$$p = -\frac{17}{8} p_2 \cos 2\Theta.$$

Wir wollen jetzt die Flächennormalen des Zylindroids längs der Kurve der Endpunkte senkrecht in

[14]) R. v. Lilienthal: „Vorlesungen über Differentialgeometrie", I. Bd., § 9, S. 220.

die x, y-Ebene projizieren und zeigen, daß die Einhüllende dieser Projektionen identisch ist mit der senkrechten Projektion der Striktionslinie unserer Fläche in die x, y-Ebene.

Die Gleichungen der senkrechten Projektion der zu Θ gehörenden Flächennormale auf die x, y-Ebene sind:

$$x = \frac{p_2}{2} \cos 2\Theta \cos\Theta + \varkappa \frac{4 \sin\Theta}{\sqrt{17}}.$$

$$y = \frac{p_2}{2} \cos 2\Theta \sin\Theta - \varkappa \frac{4 \cos\Theta}{\sqrt{17}}.$$

Folglich wird die Schar der Projektionen durch die Gleichung:

$$x \cos\Theta + y \sin\Theta - \frac{p_2}{2} \cos 2\Theta = 0$$

dargestellt. Für die Einhüllende dieser Projektionen gilt außerdem die Beziehung:

$$-x \sin\Theta + y \cos\Theta + p_2 \sin 2\Theta = 0.$$

Daher wird die Einhüllende selbst durch die Gleichungen:

$$x = \frac{p_2}{2}(\cos\Theta \cos 2\Theta + 2 \sin\Theta \sin 2\Theta) =$$

$$= \frac{p_2}{2} (\cos\Theta + \sin\Theta \sin 2\Theta),$$

$$y = \frac{p_2}{2}(\sin\Theta \cos 2\Theta - 2 \cos\Theta \sin 2\Theta) =$$

$$- \frac{p_2}{2} (\sin\Theta + \cos\Theta \sin 2\Theta)$$

gekennzeichnet. Die Einhüllende fällt also mit der senkrechten Projektion der Striktionslinie auf die x, y-Ebene zusammen.

Dieses Ergebnis legt die Frage nahe, ob es auf dem Zylindroid noch andere Kurven wie unsere Kurve der Endpunkte mit der gefundenen Eigenschaft gibt. Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir aus von den Zylindroidgleichungen:

$$x = 2 p_2 \tau \cos 2\Theta \cos\Theta,$$
$$y = 2 p_2 \tau \cos 2\Theta \sin\Theta,$$
$$z = p_2 \sin 2\Theta,$$

in denen τ einen Parameter bedeutet. Für die Richtungskosinus der Normale des Zylindroids im Punkte (τ, Θ) findet man:

$$\lambda_1 = \frac{\sin\Theta}{\sqrt{1+\tau^2}},\quad \lambda_2 = \frac{-\cos\Theta}{\sqrt{1+\tau^2}},\quad \lambda_3 = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Wird τ als eine Funktion von Θ betrachtet, so stellen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\,p_2\,\tau\cos 2\Theta\cos\Theta,\\ f_2 &= 2\,p_2\,\tau\cos 2\Theta\sin\Theta,\\ f_3 &= p_2\sin 2\Theta \end{aligned}$$

eine auf dem Zylindroid gelegene Kurve dar. Die Striktionslinie der durch diese Kurve gelegten Normalenfläche des Zylindroids habe die Koordinaten: x_1, y_1, z_1, so daß:

$$x_1 = f_1 - \frac{\Sigma f'_1 \lambda'_1}{\Sigma (\lambda'_1)^2}\,.\,\lambda_1, \quad \text{usw. ist.}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} f'_1 &= 2\,p_2\,\{\ -\tau(\sin\Theta\cos 2\Theta + 2\sin 2\Theta\cos\Theta)\\ &\qquad + \tau'\cos 2\Theta\cos\Theta\ \}\ ,\\ f'_2 &= 2\,p_2\,\{\ -\tau(-\cos\Theta\cos 2\Theta + 2\sin 2\Theta\sin\Theta)\\ &\qquad + \tau'\cos 2\Theta\sin\Theta\ \}\ ,\\ f'_3 &= 2\,p_2\cos 2\Theta, \end{aligned}$$

$$\lambda'_1 = \frac{(1+\tau^2)\cos\Theta - \tau\tau'\sin\Theta}{(\sqrt{1+\tau^2})^3}\ ,$$

$$\lambda'_2 = \frac{(1+\tau^2)\sin\Theta + \tau\tau'\cos\Theta}{(\sqrt{1+\tau^2})^3}\ ,$$

$$\lambda'_3 = \frac{\tau'}{(\sqrt{1+\tau^2})^3},$$

so daß:

$$\Sigma f'_1 \lambda'_1 = \frac{4\,p_2}{\sqrt{1+\tau^2}}\left\{\ -\tau\sin 2\Theta + \tau'\cos 2\Theta\ \right\},$$

$$\Sigma (\lambda'_1)^2 = \frac{1+\tau^2+\tau'^2}{(1+\tau^2)^2} \quad \text{ist.}$$

Die Gleichungen der senkrechten Projektion der Striktionslinie auf die x, y-Ebene sind demnach:

$$x_1 = 2\,p_2\,\tau\cos 2\,\Theta\cos\Theta$$
$$+\frac{4\,p_2\,(\tau\sin 2\,\Theta - \tau'\cos 2\,\Theta)(1+\tau^2)}{1+\tau^2+\tau'^2}\,.\,\sin\Theta,$$

$$y_1 = 2\,p_2\,\tau\cos 2\,\Theta\sin\Theta$$
$$-\frac{4\,p_2\,(\tau\sin 2\,\Theta - \tau'\cos 2\,\Theta)(1+\tau^2)}{1+\tau^2+\tau'^2}\,.\,\cos\Theta.$$

Die Gleichungen der senkrechten Projektion der zu Θ gehörenden Zylindroidnormale ist:

$$x\cos\Theta + y\sin\Theta = 2\,p_2\,\tau\cos 2\,\Theta.$$

Betrachtet man hierin Θ als veränderlich, so wird die Einhüllende der Schar der Projektionen durch die Gleichungen:

$$x_2 = 2\,p_2\,\tau\cos 2\,\Theta\cos\Theta + 2\,p_2\,(2\,\tau\sin 2\,\Theta - \tau'\cos 2\,\Theta)\sin\Theta,$$

$$y_2 = 2\,p_2\,\tau\cos 2\,\Theta\sin\Theta - 2\,p_2\,(2\,\tau\sin 2\,\Theta - \tau'\cos 2\,\Theta)\cos\Theta$$

dargestellt. Damit nun: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ sei, wird erfordert, daß

$$\frac{2\,(1+\tau^2)(\tau\sin 2\,\Theta - \tau'\cos 2\,\Theta)}{1+\tau^2+\tau'^2} = 2\,\tau\sin 2\,\Theta - \tau'\cos 2\,\Theta$$

oder: $\tau'\left\{-2\,\tau\tau'\sin 2\,\Theta + (\tau'^2 - 1 - \tau^2)\cos 2\,\Theta\right\} = 0$ sei.

Es gibt also drei Kurvenscharen auf dem Zylindroid mit der verlangten Eigenschaft. Zur Schar $\tau = \text{const.}$ gehört die Kurve der Endpunkte für den Wert: $\tau = \frac{1}{4}$.

§ 5.

Anwendung auf die parabolische Kongruenz. (K = o).

Zum Schluß soll der Fall: $K = 0$ betrachtet werden. Diese Gleichung ist nach Sannia die notwendige und hinreichende Bedingung der parabolischen Kongruenz. Ein Distributionsparameter muß verschwinden. Nehmen wir an, daß $p_1 = 0$ sei, so ist: $H = p_2 = 2r$. Die Entfernung der Brennpunkte, die allgemein gleich $2\sqrt{-K}$ ist, wird dann gleich Null.

In einer parabolischen Kongruenz ist also die Entfernung der Grenzpunkte gleich dem „mittleren" Parameter H, die beiden Brennpunkte fallen in den Mittelpunkt, die Brennfläche ist zugleich Mittelfläche. Wegen $p_1 = 0$ ist eine der Distributionsstrahlenflächen abwickelbar. Die Gratlinie derselben ist ihre Schnittkurve mit der Mittelfläche, sie ist zugleich, wie die Flächentheorie lehrt, eine Haupttangentenkurve der Mittelfläche. Hiermit hängt es zusammen, daß man eine parabolische Kongruenz dadurch erzeugen kann, daß man an sämtliche Haupttangentenkurven einer Fläche, die derselben Schar angehören, sämtliche Tangenten zieht.

Die Kurve der Endpunkte der Zylindroidachsen hat jetzt die folgenden Gleichungen:

$$x = \frac{p_2}{4}(1 + \cos 2\Theta)\cos\Theta,$$

$$y = \frac{p_2}{4}(1 + \cos 2\Theta)\sin\Theta,$$

$$z = \frac{p_2}{2}\sin 2\Theta.$$

Den Verlauf der Kurve kann man an folgenden Punkten verfolgen:

Θ:	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
x:	$\frac{p_2}{2}$	$\frac{p_2}{8}\sqrt{2}$	0	$-\frac{p_2}{8}\sqrt{2}$	$-\frac{p_2}{2}$	$-\frac{p_2}{8}\sqrt{2}$	0	$\frac{p_2}{8}\sqrt{2}$
y:	0	$\frac{p_2}{8}\sqrt{2}$	0	$\frac{p_2}{8}\sqrt{2}$	0	$-\frac{p_2}{8}\sqrt{2}$	0	$-\frac{p_2}{8}\sqrt{2}$
z:	0	$\frac{p_2}{2}$	0	$-\frac{p_2}{2}$	0	$\frac{p_2}{2}$	0	$-\frac{p_2}{2}$

Die Gleichung der senkrechten Projektion der Kurve in die x, y-Ebene lautet in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{p_2}{4}(1 + \cos 2\Theta).$$

Diese Projektion läßt sich bei vorgelegtem p_2 leicht konstruieren; sie stellt ein „Zweiblatt" mit zwei kongruenten Blättern dar, dessen Achse mit der x-Achse zusammenfällt. Die Figur liegt zur x- und y-Achse symmetrisch.

Die Kurve der Endpunkte liegt sowohl auf dem Zylindroid: $z(x^2 + y^2) = p_2 xy$ als auch auf der Rotationsfläche:

$$16(x^2 + y^2)^2 + z^4 + 8(x^2 + y^2)z^2 - 4(x^2 + y^2)p^2{}_2 = 0.$$

Die Maßzahl der Achsenlänge des Zylindroids ist gleich dem absoluten Betrage von p_2. Die Rotationsfläche ist eine ringartige Fläche nach Art eines „Wulstes", der entsteht, wenn ein Kreis um eine seiner Tangenten als Achse rotiert. Die x y-Ebene schneidet die Rotationsfläche in dem Nullkreise: $x^2 + y^2 = 0$ und in dem Kreise: $x^2 + y^2 = \left(\frac{p_2}{2}\right)^2$. Die z-Achse, welche Rotationsachse ist, durchschneidet sie in einem einzigen Punkte, dem Koordinatenanfangspunkt. Dieser Punkt ist ein singulärer Punkt der Rotationsfläche.

Die Richtungskosinus der Tangente der Kurve der Endpunkte sind:

$$\alpha = -\frac{\sin\Theta + \sin 3\Theta + \cos\Theta \sin 2\Theta}{\sqrt{5 + 2\cos 2\Theta + 13\cos^2 2\Theta}},$$

$$\beta = \frac{\cos\Theta + \cos 3\Theta - \sin\Theta \sin 2\Theta}{\sqrt{5 + 2\cos 2\Theta + 13\cos^2 2\Theta}},$$

$$\gamma = \frac{4\cos 2\Theta}{\sqrt{5 + 2\cos 2\Theta + 13\cos^2 2\Theta}}.$$

Im Besonderen gelten folgende Werte, wenn wie bisher die Quadratwurzel positiv gerechnet wird:

Θ:	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
α:	0	$-\frac{3}{10}\sqrt{10}$	0	$-\frac{3}{10}\sqrt{10}$	0	$\frac{3}{10}\sqrt{10}$	0	$\frac{3}{10}\sqrt{10}$
β:	$\frac{1}{5}\sqrt{5}$	$-\frac{1}{10}\sqrt{10}$	0	$\frac{1}{10}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{5}$	$\frac{1}{10}\sqrt{10}$	0	$-\frac{1}{10}\sqrt{10}$
γ:	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	0	-1	0	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	0	-1	0

Stellen wir das Zylindroid, auf dem die Kurve der Endpunkte liegt, mittels zweier Parameter u und Θ durch die Gleichungen:

$$x = u\cos\Theta,\ y = u\sin\Theta,\ z = \frac{p_2}{2}\sin 2\Theta$$

dar, so ist diese Kurve durch die Beziehung:

$$u = \frac{p_2}{4}(1 + \cos 2\Theta)$$

bestimmt. Aus dieser Parameterdarstellung ergeben sich die Fundamentalgrößen:

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1,\ F = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial\Theta} = 0,\ G = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial\Theta}\right)^2$$
$$= u^2 + p^2{}_2\cos^2 2\Theta.$$

Für die Richtungskosinus der Flächennormale des Zylindroids längs der Kurve der Endpunkte findet man:

$$X = \frac{4 \sin \Theta \cos 2\Theta}{\sqrt{(1+\cos 2\Theta)^2 + 16 \cos^2 2\Theta}},$$

$$Y = -\frac{4 \cos \Theta \cos 2\Theta}{\sqrt{(1+\cos 2\Theta)^2 + 16 \cos^2 2\Theta}},$$

$$Z = \frac{1+\cos 2\Theta}{\sqrt{(1+\cos 2\Theta)^2 + 16 \cos^2 2\Theta}}.$$

Weiter ist: $L = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0,$

$$M = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial \Theta} = -\frac{p_2 \cos 2\Theta}{\sqrt{u^2 + p^2{}_2 \cos^2 2\Theta}},$$

$$N = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial \Theta^2} = -\frac{2 p_2 u \sin 2\Theta}{\sqrt{u^2 + p^2{}_2 \cos^2 2\Theta}}.$$

Wir wollen die Gleichung der Haupttangentenkurven des Zylindroids aufstellen. Allgemein lautet die Gleichung der Haupttangentenkurven einer Fläche:

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

Das gibt für unser Beispiel:

$$\cos 2\Theta \, du \, d\Theta + u \sin 2\Theta \, d\Theta^2 = 0,$$

indem an Stelle des Parameters v der Parameter Θ gesetzt ist. Aus der Gleichung erkennt man, daß die Parameterlinien $\Theta = \text{const.}$, welche die Erzeugenden des Zylindroids bedeuten, die eine Schar der Haupttangentenkurven sind, wodurch der Satz der Flächentheorie bestätigt wird, daß die Erzeugenden einer geradlinigen Fläche stets die eine Schar ihrer Haupttangentenkurven bilden. Die zweite Schar, aus krummlinigen Haupttangentenkurven bestehend, wird durch die Differentialgleichung bestimmt:

$$\cos 2\Theta \, du + u \sin 2\Theta \, d\Theta = 0.$$

Die Integration gestaltet sich folgendermaßen:

$$\frac{du}{u} = -\operatorname{tg} 2\Theta \, . \, d\Theta.$$

Allgemein ist: $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln(\cos x),$

$$\int \operatorname{tg} 2x \, dx = -\frac{1}{2} \ln(\cos 2x).$$

Also ist: $\ln u = \frac{1}{2} \ln (\cos 2\Theta) + \ln a$, wo $\ln a$ eine willkürliche Konstante ist. Aus der letzten Gleichung folgt: $u = a \sqrt{\cos 2\Theta}$.

Eine der zweiten Schar der Haupttangentenkurven des Zylindroids angehörende Kurve hat also die Gleichungen:

$$x = a \sqrt{\cos 2\Theta} \cdot \cos \Theta,$$
$$y = a \sqrt{\cos 2\Theta} \cdot \sin \Theta,$$
$$z = \frac{p_2}{2} \sin 2\Theta.$$

Für $\Theta = 0$ ist: $x = a$; $y = z = 0$. Die Konstante a bedeutet also für jede einzelne Kurve der Schar die x-Koordinate ihres Schnittpunktes mit der positiven x-Achse ($\Theta = 0$). Für $\Theta = \pm \frac{\pi}{4}$ ergibt sich:

$$x = y = 0, \; z = \pm \frac{p_2}{2},$$

welchen Wert auch a haben möge. Hieraus folgt, daß alle Kurven der Schar durch die Grenzpunkte des Zylindroids gehen. Die Kurve der Endpunkte wird in einem Punkte Θ von derjenigen nicht geradlinigen Haupttangentenkurve des Zylindroids geschnitten, für welche $a = \frac{p_2 (1 + \cos 2\Theta)}{4 \sqrt{\cos 2\Theta}}$ ist. Der Winkel φ, unter dem die Kurve der Endpunkte die Erzeugenden des Zylindroids schneidet, ist bestimmt durch die Formel:

$$\cos \varphi = - \frac{2 \sin 2\Theta}{\sqrt{5 + 2 \cos 2\Theta + 13 \cos^2 2\Theta}}.$$

Die Richtungskosinus der Tangente an die die Kurve der Endpunkte schneidende nicht geradlinige Haupttangentenkurve des Zylindroids seien α', β' γ'. Man findet:

$$\alpha' = - \frac{(1 + \cos 2\Theta) \sin 3\Theta}{\sqrt{(1 + \cos 2\Theta)^2 + 16 \cos^4 2\Theta}},$$
$$\beta' = \frac{(1 + \cos 2\Theta) \cos 3\Theta}{\sqrt{(1 + \cos 2\Theta)^2 + 16 \cos^4 2\Theta}},$$
$$\gamma' = \frac{4 \cos^2 2\Theta}{\sqrt{(1 + \cos 2\Theta)^2 + 16 \cos^4 2\Theta}},$$

Deshalb ist der Winkel φ, unter dem die genannten Kurven sich schneiden, durch die Formel bestimmt:

$$\cos\varphi = \frac{(1+\cos 2\Theta)(1+\cos 2\Theta+\sin^2 2\Theta)+16\cos^3 2\Theta}{\sqrt{(1+\cos 2\Theta)^2+16\cos^4 2\Theta}\cdot\sqrt{5+2\cos 2\Theta-13\cos^2 2\Theta}}$$

Lebenslauf.

Geboren am 25. Februar 1880 zu Büren i. Westf., Sohn der in Paderborn verstorbenen Eheleute Philipp Nadermann und Bernhardine Nadermann, geb. Block, katholischer Konfession, besuchte ich zuerst die Volks- und Rektoratschule meiner Vaterstadt, sodann das Gymnasium zu Brilon bis zur Erlangung des Reifezeugnisses Ostern 1900.

Ich studierte zuerst ein Semester Theologie in Paderborn, sodann Mathematik und Naturwissenschaften an den Universitäten Berlin und Münster, an letzterer bestand ich im Februar 1905 die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen.

Von Ostern 1905 bis Ostern 1908 absolvierte ich das Seminar- und Probejahr an verschiedenen höheren Lehranstalten der Provinz Hessen-Nassau und genügte meiner Militärdienstpflicht als Einjährig-Freiwilliger im Infanterie-Regiment Nr. 158 zu Paderborn. Ostern 1908 wurde ich als Oberlehrer an der damaligen Realschule in Gronau i. Westf. angestellt. Im Heeresdienste stand ich von Herbst 1914 bis Februar 1916.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Geheimrat v. Lilienthal, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, für sein stets freundliches Entgegenkommen herzlichst zu danken.

Graphische Kunstanstalt Montanus u. Ehrenstein
Spezial-Druckerei für Dissertationen
Fernruf 469 ~ Barmen ~ Huldastr. 54